4. Métodos de previsão baseados em médias móveis ou regressão linear

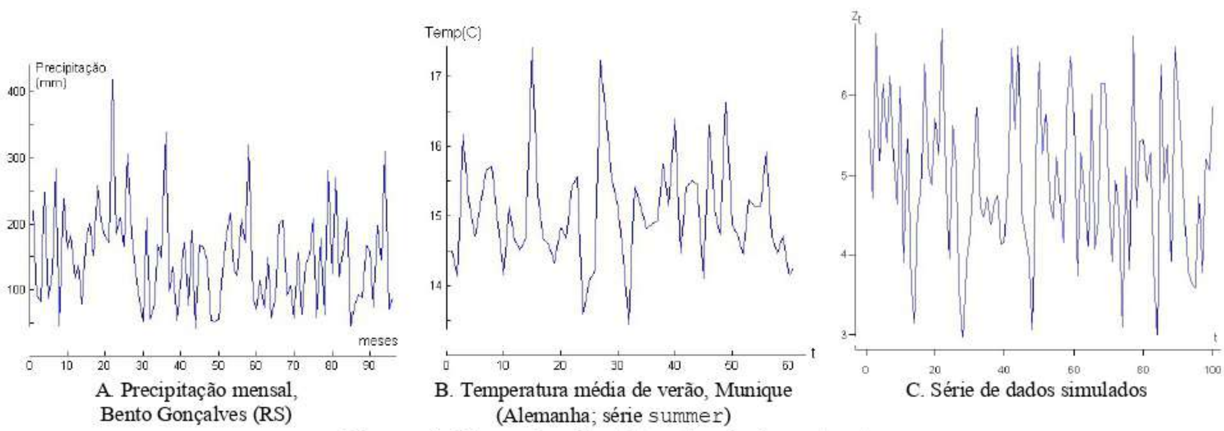
---

Neste capítulo estudaremos métodos que fazem previsões de uma série a partir da média das observações passadas, ou da aplicação de um modelo de regressão linear a estas observações. Apesar de sua relativa simplicidade, estes métodos – e seus derivados, os métodos de *amortecimento exponencial* (Cap. 5) − são ainda os mais usados para resolver os problemas práticos de previsão em indústrias, comércio, saúde pública, etc., por serem fáceis de usar, e por fornecerem previsões razoavelmente acuradas a um custo muito baixo.

Embora alguns destes métodos tenham sido depois justificados em termos estatísticos (são casos particulares dos modelos ARIMA, cf. Cap. 6), eles foram desenvolvidos de forma empírica, e podem ser usados da mesma forma – os usuários não precisam, por exemplo, verificar a *significância* estatística dos parâmetros ou a *autocorrelação* dos resíduos, como acontece quando usam modelos ARIMA. No texto deste capítulo, reduzimos dentro do possível o formalismo matemático, e procuramos dar ao leitor uma compreensão intuitiva das idéias que estão na base dos métodos; para os interessados, reunimos as demonstrações dos resultados mais importantes no Apêndice 2.

4.1. Métodos baseados num modelo de nível constante

Os métodos mais simples são aqueles que pressupõem que os valores de uma série oscilam aleatoriamente em torno de um nível constante.



A. Precipitação mensal, Bento Gonçalves (RS)

B. Temperatura média de verão, Munique (Alemanha; série `summer`)

C. Série de dados simulados

Figura 1. Exemplos de séries de nível constante

As Figs. 1A e 1B mostram exemplos de séries de dados reais que podem ser aproximamente descritas por um modelo destes. A primeira é uma série de precipitações mensais, em milímetros, na cidade de Bento Gonçalves (série `preciptRS`); a segunda, uma série de temperaturas médias de verão em Munique, Alemanha (parte da série `summer`). A Fig. 1C mostra uma série de dados simulados (a criação de séries simuladas em R é vista no Apêndice 3).

Para as séries acima, podemos escrever um modelo estatístico simples da forma:

$$Z_t = a + \varepsilon_t, \qquad \text{para } t = 1, 2, \ldots, T \tag{1}$$

onde a é uma constante (o *nível* da série), e ε_t é uma seqüência de variáveis aleatórias (um *erro* aleatório). Estas variáveis ε devem ter média nula, variância constante e mesma distribuição de probabilidades (geralmente gaussiana).

Se o modelo acima descreve bem a série, a melhor previsão que pode ser feita no instante T para o valor da série em qualquer instante futuro $T+k$ será dada pela estimativa do nível a, já que o valor futuro do erro ε_{T+k} não pode ser previsto. Isto é,

$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T$$

Note, em primeiro lugar, que a previsão do valor de Z_{T+k} feita no instante T será sempre a mesma, para qualquer instante $T+k$ no futuro (no gráfico, a série de previsões para qualquer instante no futuro será dada simplesmente uma reta horizontal). Em segundo lugar, que o nível a no modelo na eq. (1) é uma constante, mas sua estimativa $\hat{a}_T$ é uma variável: a cada instante T calculamos uma nova estimativa, com base nos valores observados até então, e refinamos a estimativa anterior. O problema é conseguir a melhor estimativa $\hat{a}_T$; veremos a seguir algumas das formas existentes de estimação do nível baseada em médias.

4.1.1. Método da média simples (ou média global)

Se temos uma série de observações $Z_1, \ldots, Z_T$ e acreditamos que todas elas devem ter o mesmo peso na estimação do nível da série (i.e., acreditamos que a informação trazida por qualquer das observações do passado é igualmente importante), o método mais simples para estimar a constante a é tirar a média aritmética M_T de todos os valores passados da série:

$$\hat{a}_T = M_T = \frac{Z_T + Z_{T-1} + \ldots + Z_1}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Z_t \tag{2}$$

Além de fácil de calcular, esta média tem várias propriedades estatísticas interessantes. Por exemplo, pode ser demonstrado que esta média dá a estimativa do nível que consegue o melhor ajuste do modelo aos dados da série, no sentido de ser a que leva ao menor erro quadrático (em termos estatísticos, esta média é o estimador dos *mínimos quadrados ordinários*; veja o Apêndice 2); além disso, é um estimador *não-enviesado* e *eficiente*, duas propriedades estatísticas úteis (que não serão demonstradas).

A Fig. 2 mostra as previsões feitas por este método para a série da Fig. 1B. Observe que a série de previsões tende a ficar cada vez mais amortecida (com menor variância) à medida o tempo avança, e a convergir para um valor fixo (o nível a do modelo).

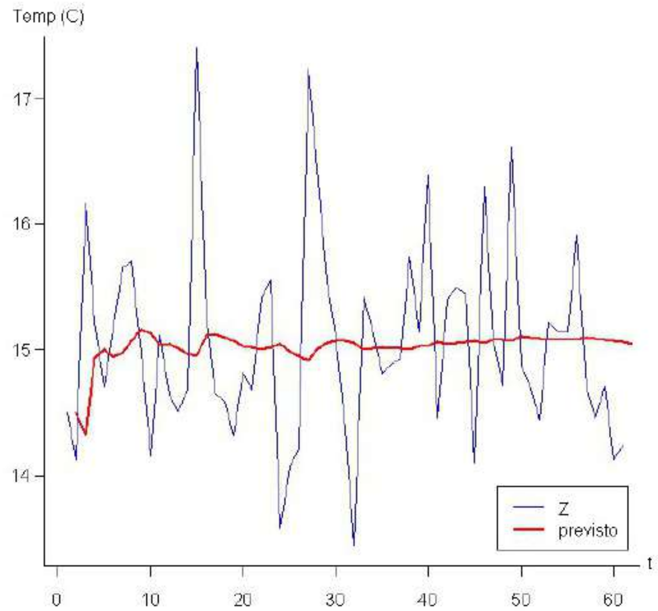


Figura 2 – Previsões pela média simples, parte da série `summer`

Na prática, contudo, raramente encontramos situações onde a série seja completamente *estacionária* na média, como nas Figs. **1A** a **1C**. Em geral não podemos supor que modelos sejam *globais* (válidos em todos os instantes), mas sim apenas *locais* (válidos numa vizinhança em torno de um instante determinado); se o modelo foi aproximadamente válido em alguns instantes recentes, não podemos ter certeza de que será válido também em instantes remotos do passado ou do futuro.

A série de temperaturas em Munique nos dá um exemplo disto. O gráfico do trecho mostrado na Fig. **2** sugere que o nível seja constante, em torno de 15º C; o gráfico da série completa, na Fig. **3**, sugere porém que o nível varia ao longo do tempo (nível estimado por médias móveis com ponderação de Henderson e ordem n=23; ver Seção 3.2.3).

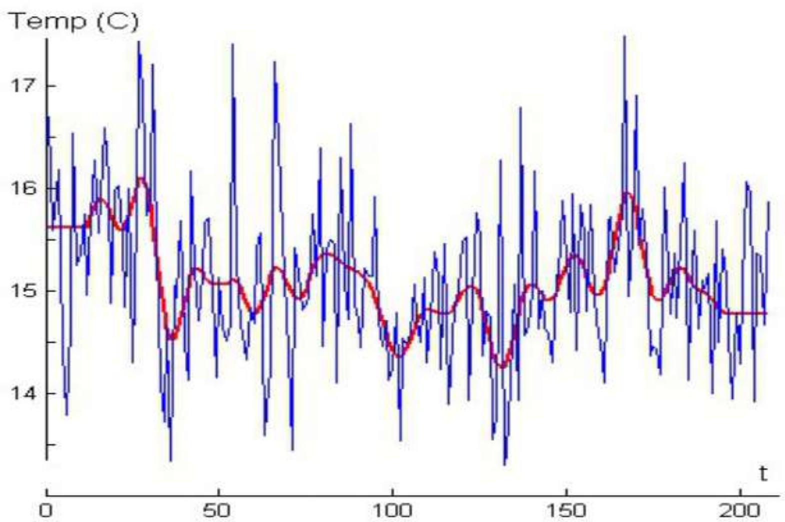
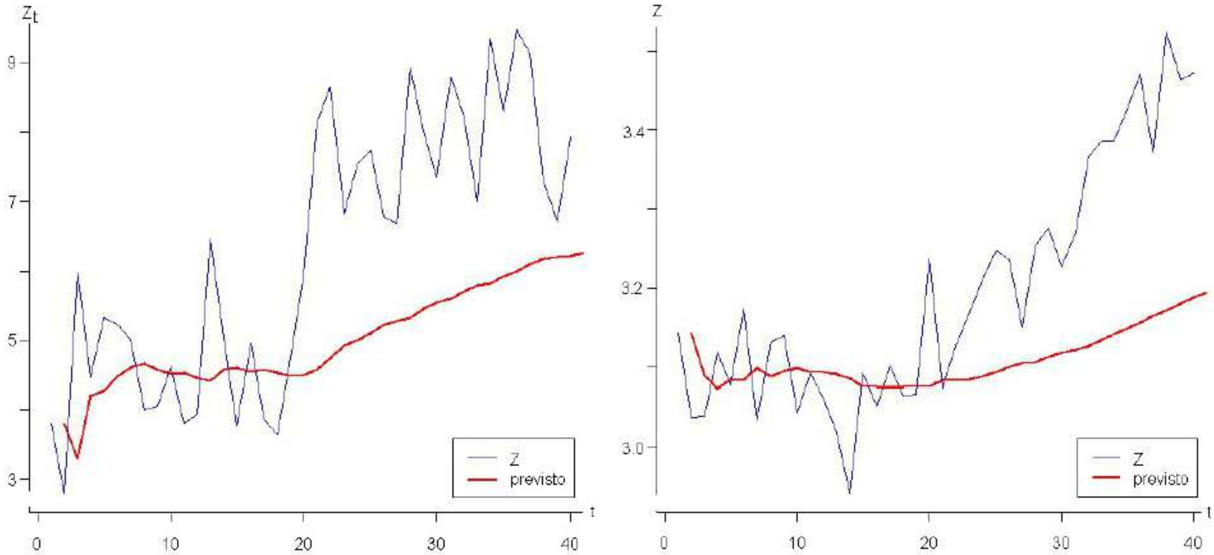


Figura 3 – Nível da série `summer`**, estimado por médias móveis ponderadas**

Há várias maneiras em que uma série pode deixar de ser estacionária, invalidando as previsões obtidas pela média simples. A Fig. 4 mostra dois casos, exemplificados por meio de séries simuladas.



A. Série com mudança brusca de nível B. Série com mudança suave de nível (tendência)

Figura 4. Séries com nível variável, previsões por média simples

Na série da Fig. 4A, o nível se alterou bruscamente a partir do instante t=21, e assumiu outro valor constante, mais elevado; este tipo de alteração é geralmente chamado de *degrau*. (Um exemplo deste tipo de quebra em dados reais é encontrado na série de vazões do rio Nilo, Figs. 1C e 4 do Cap. 1). Na série da Fig. 4B, a série teve nível constante até t=15, mas a partir daí começou a subir de forma progressiva (dizemos então que a série tem uma *tendência*). Os gráficos mostram as previsões feitas para estas séries pela média simples. Como pode ser visto, após a mudança do nível a série de previsões sobe lentamente, e parece convergir para o novo nível do modelo; as previsões porém nunca conseguem alcançar o novo nível, porque os valores observados antigos (referentes ao nível antigo) não serão descartados do cálculo, e estarão sempre contaminando as estimativas do novo nível. Uma maneira de conseguir melhores previsões, nestes casos, seria descartar os valores antigos da série, não mais representativos, e incluir na média apenas os valores mais recentes. Esta é a idéia básica do método de *médias móveis*, visto a seguir.

4.1.2. Método das médias móveis

Se não é realista supor que o nível a da série seja sempre constante, uma maneira de estimá-lo a cada instante T é calcular a média das n observações mais recentes, da forma:

$$\hat{a}_T = M_T = \frac{Z_T + Z_{T-1} + \ldots + Z_{T-n+1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{t=T-n+1}^{T} Z_t \qquad (3)$$

Esta média é chamada de *média móvel de ordem n*, e a representaremos por *MM(n)*; a estimativa a cada instante será baseada nas observações que estão dentro de uma "janela" que abrange os n instantes de tempo mais recentes. A cada passo, esta janela será deslocada um instante à frente. (Note que se o nível fosse realmente constante não faria sentido usar médias móveis; a média dos n valores mais recentes não seria um estimador melhor do que a média de qualquer outra seqüência de n valores mais antigos.) Novamente, pode ser demonstrado que a M_T é o estimador de MQO para o nível da série.

Nota:
As médias móveis que usamos anteriormente para a estimação por amortecimento da tendência de uma série no Cap. 3 era definida de forma diferente da usada aqui. A janela de tempo na qual era calculada a média móvel M_T para *amortecimento* era centrada no instante T, e se estendia k instantes para o futuro, e k instantes para o passado, na forma:

$$M_T = \frac{1}{n}\sum_{j=-k}^{k} Z_{T+j} \qquad \text{onde } k = \frac{(n-1)}{2}$$

A janela usada na média móvel para *previsão*, evidentemente, só pode se estender para os valores passados. Portanto, para uma M_T de ordem n, a janela conterá os valores T-n+1 a T:

$$M_T = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} Z_{T-j}$$

4.1.2.1. Como escolher a ordem n das médias móveis

Se usamos médias móveis para a previsão, o problema será o de decidir qual a melhor *ordem*, isto é, qual o melhor tamanho n da janela. Se n for grande, cada nova observação terá pouca peso na média, e a série de previsões tenderá a ser mais estável, demorando a reagir quando houver mudanças no nível da série. Se n for pequeno, a série de previsões será instável, com oscilações mais pronunciadas.

Se a ordem é n =20, por exemplo, uma observação discrepante terá pouca influência na previsão, pois seu efeito na média será contrabalançado pelo efeito de 19 outros valores anteriores, não-discrepantes. Por outro lado, se a ordem é baixa, por exemplo n =3, uma observação discrepante poderá afetar muito a previsão seguinte, pois será contrabalançada por apenas duas observações anteriores (veja Apênd. 2). Os casos extremos são aqueles onde n=T (isto é, a média é calculada com *todos* os valores passados da série) e onde n=1 (a média é calculada apenas com o último valor observado). Estas médias correspondem, respectivamente, à estimação por *média simples* (seção 4.1.1) e à previsão *ingênua* (seção 2.3.4).

Outra maneira de entender o efeito da ordem n das médias móveis no comportamento do método é examinando a variância das previsões; é fácil verificar que, à medida que aumenta n, diminui a variância da média móvel M_T, e mais amortecida se torna portanto a série de previsões. (Como em qualquer outro problema de inferência estatística, quanto maior a amostra, menor o erro amostral da média; veja Apênd. 2).

Compare por exemplo, na Fig. **5B**, as previsões feitas por MM(3) com as feitas por MM(6)). Quando o nível da série é aproximadamente constante, portanto, podemos usar médias móveis de ordem alta, de modo a melhorar a estimação do nível. Quando o nível da série oscila muito, porém, pode ser melhor usar ordens mais baixas, para que as previsões respondam mais rapidamente às mudanças do nível.

Há dois métodos comumente usados para a escolha da ordem n. O primeiro é fazer uma *busca* (*grid search*): simplesmente experimentar com diversos valores plausíveis de n, e usar aquele que levar ao menor erro. (Um exemplo desta busca está implementado em R na função `find_n`, cf. Apênd. 4). O segundo método é usar alguma função de otimização para buscar o valor de n que minimize a soma dos quadrados dos erros de previsão um-passo-à-frente num trecho escolhido da série; isto é, o valor de n que minimize a soma dos quadrados dos erros num intervalo definido entre t_1 e t_2:

$$SQ = \sum_{t=t_1}^{t_2} e_t^2$$

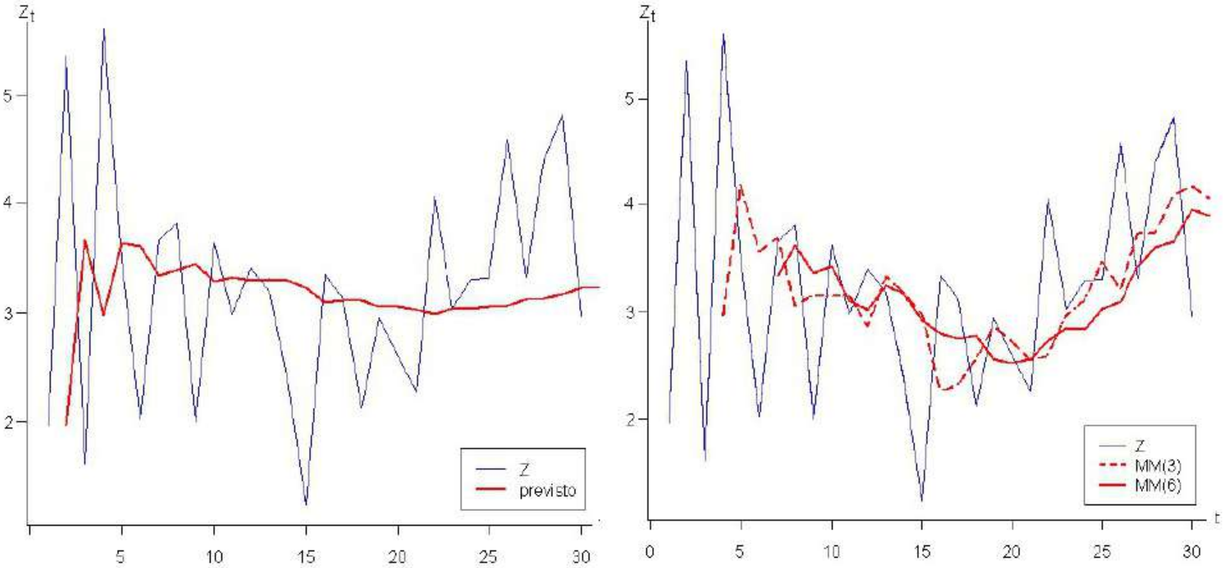
onde:

$$e_t = Z_t - \hat{Z}_{t|t-1}$$

No R existem duas funções que podem ser usadas para isto, `optim` e `optimize`.

No exemplo da Fig. 5A, podemos ver que as previsões por média simples não são muito adequadas, uma vez que o nível da série não parece constante. A Fig. 5B compara as previsões por MM(3) e MM(6). Para estes três métodos, os erros MSE (calculados no intervalo t=11 a t=30) foram:

- previsão por média simples: MSE = 0.7479
- previsão por MM(3): MSE = 0.6489
- previsão por MM(6): MSE = 0.6087



A. Previsão por média simples B. Previsão por médias móveis, n=3 e n=6

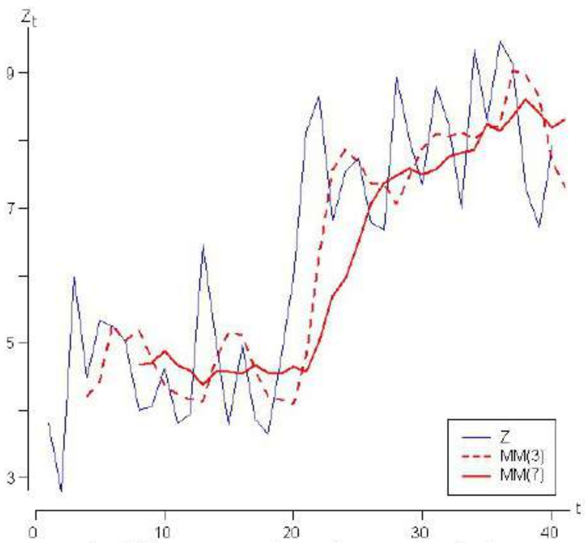
Figura 5. Previsões por média simples e médias móveis, série simulada

4.1.2.2. Uso de médias móveis em séries cujo nível não é constante

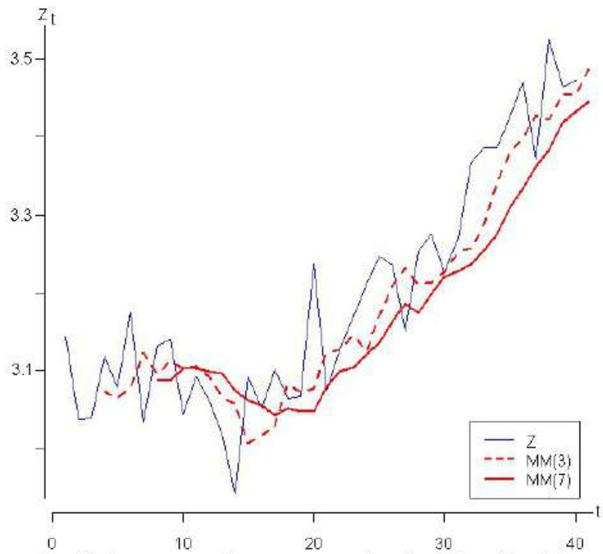
Quando o nível do modelo muda suavemente, o método das médias móveis ainda pode dar previsões razoáveis; por exemplo, na série da Fig. 5. Quando as mudanças de nível são muito evidentes, porém, o método não é muito útil. Vimos na Fig. 4 o que acontece quando o nível da série se altera, e as previsões são feitas por meio da *média simples*; veremos agora o que acontece se as previsões são feitas por *médias móveis*.

Se a alteração do nível for do tipo *degrau* (no exemplo da Fig. 6A, uma constante é adicionada ao nível no instante t=21), as estimativas feitas por meio de médias móveis de ordem n passarão por um período de transição, durante o qual serão baseadas tanto na parte antiga da série quanto na parte nova; depois do instante $t+n$, serão baseadas apenas na parte nova da série. Evidentemente, quanto menor for o valor de n, mas rapidamente as previsões irão se aproximar da nova média da série. A Fig. **6A** mostra isto, comparando os resultados de uma MM(3) com uma MM(7). Podemos ver que a média móvel de ordem n=3 responde mais rapidamente à mudança do nível; depois do instante t=23, os valores da parte antiga da série não serão mais usados, e a média móvel oferecerá uma boa previsão do novo nível. As previsões por MM(7), por outro lado, somente se aproximarão do novo nível depois de t=27.

Se a média do processo é alterada de maneira gradual, contudo, nenhum dos métodos vistos até agora produzirá bons resultados. Se o nível é aumentado de forma linear − i.e., se uma tendência linear crescente for acrescentada à série, como na Fig. **6B** −, as previsões por meio de médias móveis tenderão a ser inferiores aos valores observados. Uma vez que o nível está subindo, a média das observações passadas tenderá a ser menor do que a das observações futuras (veja Apênd. 2). Na seção seguinte estudaremos métodos que podem ser usados em séries com *tendência*, tanto linear quanto quadrática.



A. Série com mudança brusca de nível



B. Série com mudança suave de nível (tendência)

Figura 6. Séries com nível variável, previsões por média móvel

4.2. Métodos baseados num modelo com tendência linear

O modelo com tendência linear é dado pela soma de um nível μ_t com um ruído ε_t :

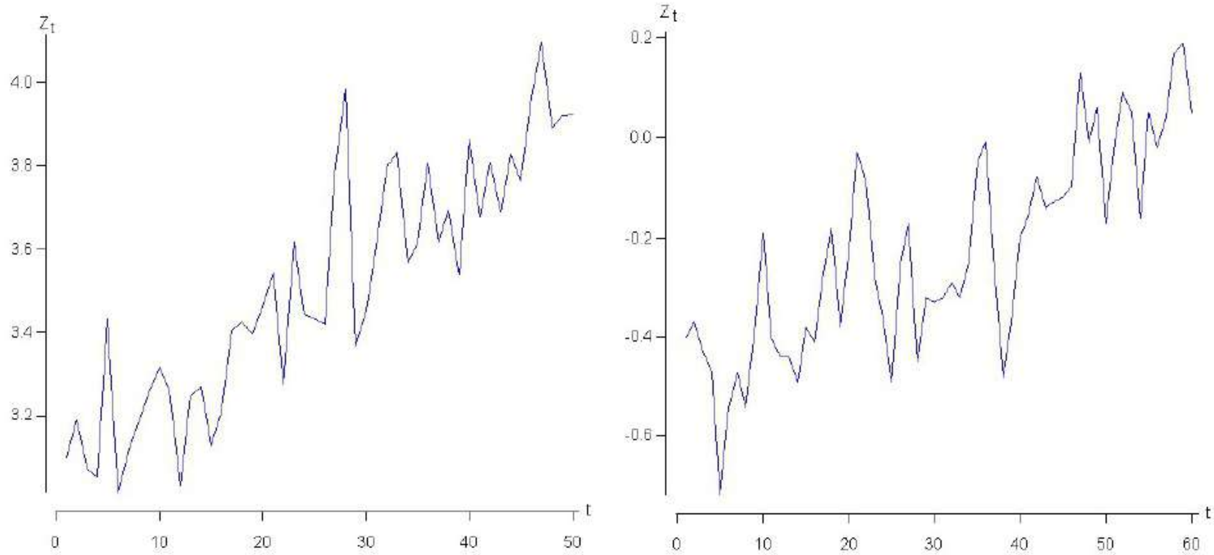
$$Z_t = \mu_t + \varepsilon_t \qquad (4)$$
$$\mu_t = a + bt$$

Note que o nível não é mais uma constante, como era na eq. (**1**), e sim uma variável que segue um modelo linear, onde a e b são os parâmetros. O erro ε_t é uma seqüência de variáveis aleatórias de média nula e variância constante σ_ε^2 . O valor esperado e a variância de Z_t são dados por:

$$E(Z_t) = E(a + bt + \varepsilon_t) = a + bt$$
$$V(Z_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Os valores de Z_t irão portanto oscilar em torno de uma reta inclinada, como nas duas séries da Fig. 7. Na prática, contudo, nenhuma série de dados reais, na natureza ou na sociedade, pode ter um nível que cresce (ou diminui) continuamente; qualquer sistema real mais cedo ou mais tarde atinge um ponto de saturação, e o nível ou se estabiliza ou reverte aos valores anteriores. A série da Fig. 7B, por exemplo, parece crescer de forma quase perfeitamente linear; no entanto, se examinamos o resto dos dados disponíveis (Fig. 8B), veremos que o nível decresce entre os instantes t=60 e t=100, para depois subir novamente.

O modelo na eq. (4), portanto, deve ser interpretado como um modelo de validade apenas *local*; iremos supor que, na vizinhança de um dado instante *t*, o nível da série se comporta de forma aproximadamente linear. O modelo não implica que o nível da série deverá subir (ou descer) indefinidamente segundo uma reta, mas sim que ele pode ser aproximado por uma sucessão de segmentos de reta que representam o melhor modelo disponível a cada instante.



A. Série simulada

B. Série `globtp`: Variação da temperatura mundial (1880-1939)

Figura 7. Exemplos de séries com tendência linear

Uma vez que os parâmetros *a* e *b* também variam um pouco ao longo do tempo, poderíamos ter escrito um modelo onde esta variação fosse explicitada, como por exemplo:

$$Z_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = a_t + b_t t$$

(Note que *a* e *b* não são agora parâmetros fixos, pois são indexados ao tempo *t*). Isto tornaria o problema bem mais complicado, porque então seria necessário especificar modelos para descrever a variação de *a* e de *b* ao longo do tempo:

$$a_t = f_1(t)$$
$$b_t = f_2(t)$$

e a estimação de todos estes modelos não seria trivial. Uma classe de modelos que faz isto são os *modelos estruturais* [1], mas estes modelos estão fora do escopo deste livro. Ao invés disto, o que faremos a seguir é usar métodos recursivos para modificar a estimativa dos parâmetros a cada instante.

Para o modelo linear, as previsões do valor de Z no instante $T+k$, feitas com os dados disponíveis até o instante T, serão dadas por (veja Apênd. 2):

$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T + \hat{b}_T k$$

Precisamos então de obter duas estimativas, feitas no instante T com os dados disponíveis até este instante:

$\hat{a}_T$: estimativa do nível no instante T

$\hat{b}_T$: estimativa da declividade ou tendência no instante T

Há várias maneiras de conseguir estas estimativas. A primeira é tratar o modelo como se fosse um problema de regressão linear de Z em t, e estimar seus parâmetros pelo método dos *mínimos quadrados ordinários* (MQO). A estimação pode ser feita com base em toda a série de observações passadas (seção 4.2.1.1), ou em sub-séries contidas em janelas móveis de tamanho fixo (seção 4.2.1.2). A segunda maneira é adaptar o método das *médias móveis* visto anteriormente, de forma que ele possa ser usado para estimar dois parâmetros (seção 4.2.2). Outras maneiras, baseadas em *amortecimento exponencial*, serão vistas no Cap. **5**.

4.2.1. Métodos baseados em regressão linear e estimação por MQO

4.2.1.1. Estimação por regressão global

Usar o método dos MQO corresponde a tratar o modelo como se fosse uma regressão linear de Z em t, da forma:

$$Z_t = a + bt + e_t$$

Este método, bem conhecido na Estatística, nos permite encontrar os valores dos parâmetros a e b que minimizam a soma SQ dos quadrados dos erros do modelo, dada por (supondo que as previsões sejam um-passo-à-frente):

$$SQ = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (Z_t - \hat{Z}_{t|t-1})^2 = \sum_{t=1}^{T} [Z_t - (a_{t-1} + b_{t-1})]^2$$

Neste método, os parâmetros a_t e b_t são re-estimados a cada instante $t=T$, com base em toda a série de valores observados até aquele instante ($t=1$ a $t=T$). Isto é análogo a usar a *média simples*, para o modelo constante (Seção 4.1.1), e tem o mesmo defeito: estaremos considerando que o modelo seja *global*, e que a informação trazida por todas as observações do passado tenham o mesmo peso. Na prática, como já foi dito, em geral é mais sensato considerar que o modelo seja apenas *local*, e que as observações mais recentes devem ter mais importância do que as mais antigas.

A Fig. **8A** mostra o resultado da aplicação deste método à sub-série já mostrada na Fig. **7B**. Neste trecho, o método parece dar bons resultados, com as previsões seguindo de perto a tendência aparente dos dados. A Fig. **8B**, contudo, mostra o que acontece quando usamos toda a série disponível. Aproximadamente no instante $t=60$ a tendência da série é revertida, mas previsões não refletem esta alteração – os valores da série começam a decrescer, mas os das previsões continuam a subir. Em casos como este, é melhor usar o método de *regressão em janela móvel*, visto a seguir.

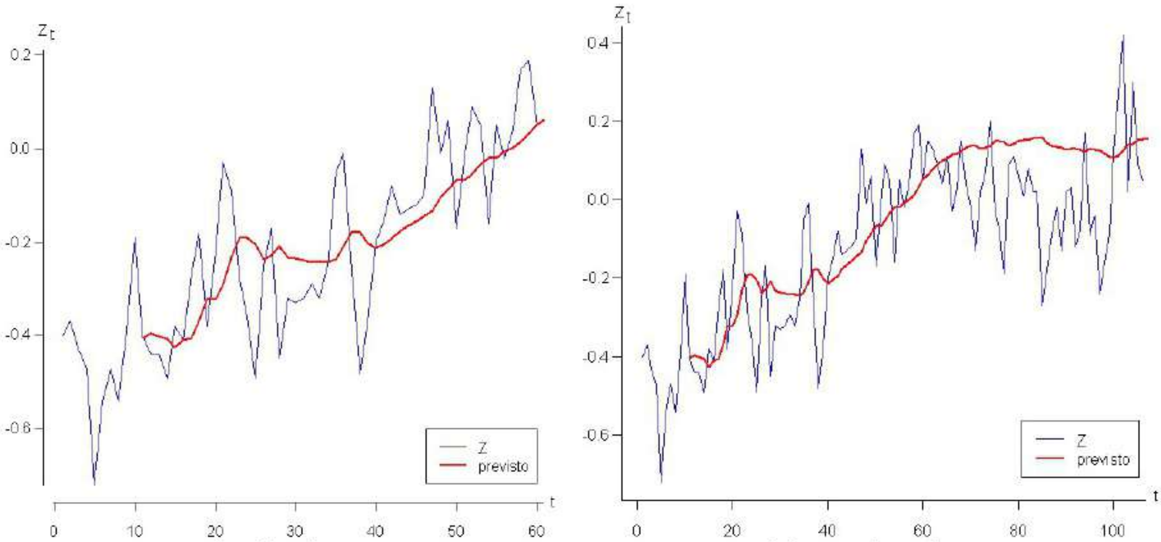


Figura 8. Previsões usando regressão global, série `globtp`

4.2.1.2. Estimação por meio de regressão em janela móvel

Se acreditamos que a informação mais nova trazida pelas observações recentes de uma série devem ter mais importância do que a informação mais antiga (pois o modelo gerador dos dados pode ter se alterado ao longo do tempo), podemos estimar os parâmetros recursivamente sobre *janelas móveis*, isto é, sobre fragmentos de série que contém apenas as *n* observações mais recentes. A estimação ainda pode ser feita por MQO, mas as equações dos estimadores têm que ser modificadas. A derivação das novas equações é um tanto trabalhosa e não será mostrada aqui [[2]].

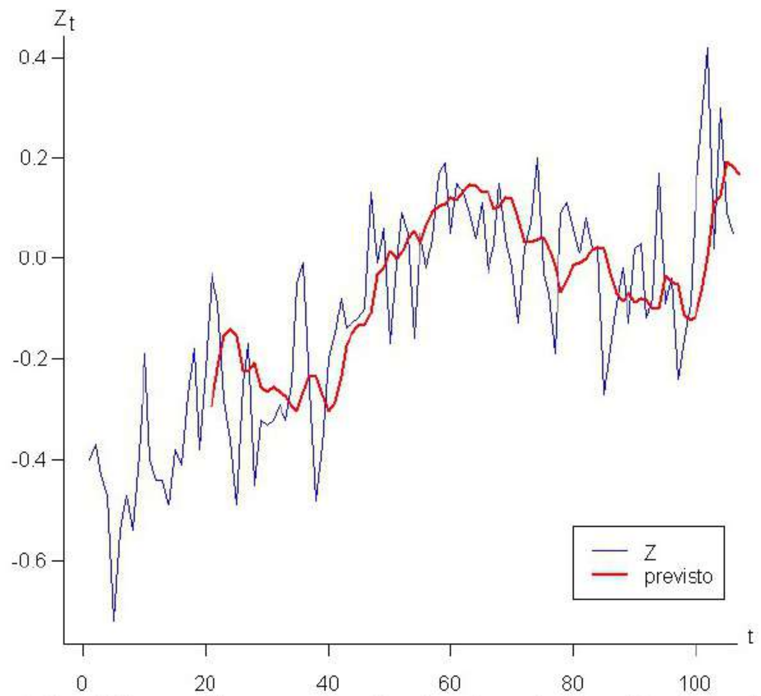


Figura 9. Previsão usando regressão sobre janelas móveis, *n*=20, série `globtp`**.**

Este procedimento equivale a ajustar um modelo de regressão linear simples sobre uma janela contendo os n dados mais recentes. Se estivermos usando o R, uma maneira mais simples de implementar este método é fazer justamente isto: criar um "laço" (*loop*) que ajuste a cada instante um modelo de regressão sobre as n observações mais recentes. Isto foi feito no exemplo da Fig. **9**, usando janelas móveis de n=20. Podemos ver que as previsões feitas por este método acompanham o nível da série com mais fidelidade do que as do método usado na Fig. **8B**.

4.2.2. Método das médias móveis duplas

Os métodos baseados em *médias móveis* criados para estimar um modelo de nível constante podem ser usados para estimar um modelo de nível linear ou quadrático, mas têm que ser adaptados. Se uma série tem tendência linear, e tentamos prevê-la usando o método de médias móveis já visto (Seção 4.1.2), as previsões estarão constantemente defasadas – se a tendência é crescente, as previsões tenderão a ser menores do que os valores observados. Isto é fácil de entender intuitivamente – o método de médias móveis usa uma média dos valores passados para prever o futuro, e estes valores passados tenderão a ser menores do que os valores futuros, já que a série tem tendência crescente (veja Apênd. 2).

Se queremos usar médias móveis, precisaremos de extrair uma segunda estatística amostral da série, para obter outra equação, relacionando os parâmetros a e b com os valores da série Z_t (são necessárias duas equações para estimar os dois parâmetros). Podemos obtê-la criando o conceito de "média móvel dupla":

$$M_T^{[2]} = \frac{M_T + M_{T-1} + \ldots + M_{T-n+1}}{n} \qquad \textbf{(5)}$$

O sobrescrito $[^2]$ no termo à esquerda da eq. (**5**) serve para indicar que se trata de uma estatística de segunda ordem (uma média de médias). Esta estatística é empregada no método das *Médias Móveis Duplas* (MMD).

Demonstra-se que os valores esperados das médias móveis M_T e $M_T^{[2]}$ podem ser expressos em termos dos parâmetros a e b do modelo (veja Apênd. 2):

$$E(M_T) = a - \frac{n-1}{2}b \qquad \textbf{(6)}$$

$$E(M_T^{[2]}) = a + bT - (n-1)b$$

Supondo que estamos no instante T=0, a segunda equação se simplifica para:

$$E(M_T^{[2]}) = a - (n-1)b \qquad \textbf{(7)}$$

A partir do sistema de duas equações (**6**) e (**7**), é fácil escrever os parâmetros a e b como funções dos valores esperados das médias móveis:

$$a = 2E(M_T) - E(M_T^{[2]}) \qquad b = \frac{2}{n-1}\left[E(M_T) - E(M_T^{[2]})\right]$$

Estimando os valores esperados das médias móveis pelos valores observados mais recentes destas médias, chegamos aos estimadores de a e b:

$$\hat{a}_T \approx 2M_T - M_T^{[2]} \qquad \hat{b}_T \approx \frac{2}{n-1}(M_T - M_T^{[2]}) \qquad \textbf{(8)}$$

A Fig. 10 mostra a aplicação deste método, usando n=10, para a série `globtp`, já usada nos exemplos anteriores. Podemos ver que a série de previsões acompanha bem a tendência da série (compare este gráfico com os das Figs. 8 e 9). No intervalo de t=61 a t=106, os MSE obtidos pelos três métodos foram:

regressão global:	MSE= 0,0310
regressão em janelas móveis (n=20):	MSE= 0,0195
médias móveis duplas (n=10):	MSE= 0,0197

Com já era de se esperar, pelo exame dos gráficos das Figs. 8 a 10, o método da *regressão global* foi o que teve o pior desempenho depois da mudança da tendência da série, enquanto os métodos de *regressão em janelas móveis* e de *MMD* tiveram resultados similares.

Note que, se usarmos janelas de ordem n para estimar os parâmetros do modelo por MMD, os resultados obtidos não serão exatamente iguais aos obtidos por MQO usando janelas móveis de mesma ordem. Primeiro, porque os estimadores destes dois métodos foram encontrados de formas diferentes (heuristicamente na MMD; por minimização do erro quadrático no MQO). Segundo, porque o método MMD usa informações mais antigas que o MQO, e ponderadas de forma desigual. Se a ordem é n, o método MQO usará na estimação as n observações de Z_{T-n+1} a Z_T, com pesos iguais. O método MMD, por outro lado, usará as médias móveis simples de M_{T-n+1} a M_T, e a média móvel $M^{[2]}{}_{T-n+1}$ usará observações de Z_{T-2n+2} a Z_{T-n}, que não usadas pelo MQO.

Ambos os métodos, porém, conseguem resultados bastante próximos, quando empregamos janelas de tamanho adequado. Em ambos, as médias são simples, não ponderadas; dentro da janela móvel, todos os valores observados têm o mesmo peso. No Cap. 5, veremos alguns métodos que usam pesos diferentes para cada observação (métodos de *amortecimento exponencial*).

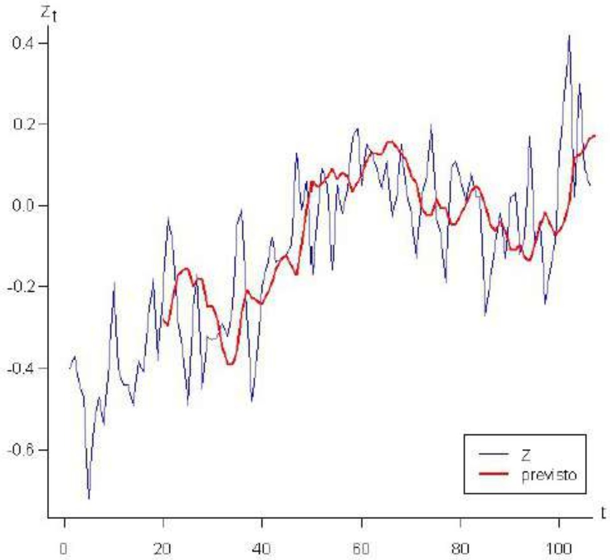


Figura 10. Previsão usando médias móveis duplas, n=10, série `globtp`.

4.3. Métodos baseados num modelo com tendência quadrática

Para séries onde o nível varia de forma muito acentuada, é possível também aplicar métodos baseados em modelos com tendência quadrática, da forma:

$$Z_t = \mu_t + \varepsilon_t$$
$$\mu_t = a + bt + ct^2$$

onde *a, b* e *c* são os parâmetros. A previsão *k* passos à frente será dada pela extrapolação da tendência quadrática a partir de $\hat{Z}_T$:

$$\hat{Z}_{T+k|T} = \hat{a}_T + \hat{b}_T k + \hat{c}_T k^2$$

Podemos estimar os parâmetros *a, b* e *c* por médias móveis. Como são três parâmetros, precisaremos de obter três equações que os relacionem; para isto, iremos calcular *médias móveis triplas* $M^{[3]}{}_T$, que são médias móveis das médias móveis duplas $M^{[2]}{}_T$ já vistas:

$$M_T^{[3]} = \frac{M_T^{[2]} + M_{T-1}^{[2]} + \ldots + M_{T-N+1}^{[2]}}{N}$$

É possível criar um sistema de três equações relacionando o valor esperado destas três médias móveis (M_T, $M^{[2]}{}_T$ e $M^{[3]}{}_T$) aos três parâmetros do modelo (*a, b,* e *c*). Substituindo estes valores esperados por suas estimativas, dadas pelas médias móveis mais recentes observadas, podemos calcular estimativas dos parâmetros. Também é possível estimar os parâmetros por MQO, buscando os valores que minimizam a soma dos erros quadráticos da previsão um passo-à-frente:

$$SQ = \sum_{t=1}^{T} e_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (Z_t - \hat{Z}_{t|t-1})^2 = \sum_{t=1}^{T} [Z_t - (a_{t-1} + b_{t-1} + c_{t-1})]^2$$

Este métodos, contudo, não são muito usados na prática, porque os métodos de amortecimento exponencial (Cap. 5) têm em geral melhor desempenho.

4.4. Conclusão

Vimos neste capítulo diversos métodos de previsão que se baseiam em médias aritméticas ou em modelos de regressão linear. Estes métodos são simples, em termos de formulação matemática ou estatística, mas são muito usados na prática, por serem robustos (pouco afetados por valores discrepantes) e fornecerem rapidamente previsões razoáveis.

Estes métodos, contudo, ainda podem ser melhorados. Uma característica comum a todos eles é a de que os observações usadas − no cálculo da média ou na estimação dos parâmetros da regressão − recebem todas o mesmo peso; uma maneira simples de tentar aperfeiçoar estes métodos seria *ponderar* as observações, de forma que as mais recentes tivessem maior peso na previsão do que as mais antigas. Isto é o que fazem os métodos de *amortecimento exponencial*, vistos no Cap. 5.

Referências

[1] Harvey, Andrew C. (1991). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

[2] Montgomery D. C., Johnson L. A., Gardner J. S. (1990). *Forecasting and time series analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill.