3.3.2. Modelo uniforme

Na seção anterior (**3.3.1**), vimos os conceitos principais e as propriedades das variáveis aleatórias discretas em geral. Nesta seção e nas seguintes (**3.3.2** a **3.3.7**), estudaremos os modelos mais importantes para estas variáveis, e as características específicas de cada um deles.

O modelo de distribuição *uniforme* é o mais simples, pois todos os valores que a variável pode assumir têm a mesma probabilidade. Exemplos de problemas em que este modelo pode ser aplicado são sorteios, lançamentos de um dado equilibrado, ou rodadas de uma roleta.

Se existem n resultados possíveis, a função de probabilidades é dada por:

$$p(k) = P(X = k) = \frac{1}{n} \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Se os valores possíveis são distribuídos uniformemente entre 1 e n ($x = 1, 2, 3, \ldots, n$), o valor esperado e a variância podem ser calculados usando as propriedades das somas de séries, o que resulta em:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Exemplo 1 - Lançamento de um dado

Se um dado equilibrado é lançado, o número mostrado é um exemplo de VAD com distribuição uniforme. Sua distribuição de probabilidades é mostrada na Tab. **1** e no gráfico da Fig. **1**.

Tabela 1

X	p(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Σ	1

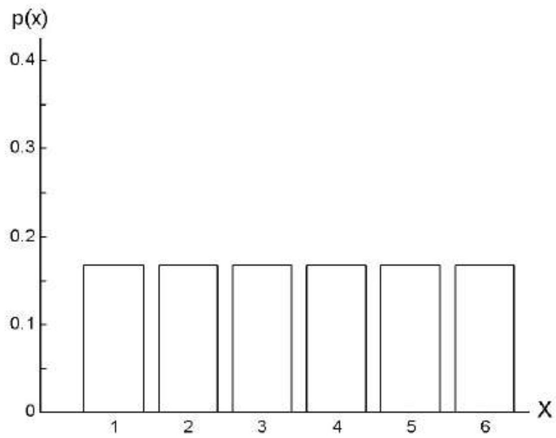


Figura 1. Função de probabilidades de X: número mostrado por um dado

O valor esperado e a variância podem ser calculadas a partir da tabela, usando as definições na seção **3.3.1.3** e **3.3.1.4**:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p(x_i) = (1+2+3+4+5+6) \times \frac{1}{6} = 3{,}5$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{6} \left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i) = \left[(1-3{,}5)^2 + .. + (6-3{,}5)^2\right] \times \frac{1}{6} = 2{,}917$$

Se usarmos as fórmulas de E(X) e V(X) para o modelo uniforme, obtemos os mesmos resultados, de forma mais simples (fazendo n=6):

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5$$

$$V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2{,}917$$

Exemplo 2 – Propriedades de E(X) e de V(X)

Usaremos o problema do lançamento de um dado para ilustrar algumas das propriedades do valor esperado e da variância de qualquer VAD, listadas na seção **3.3.1.5**:

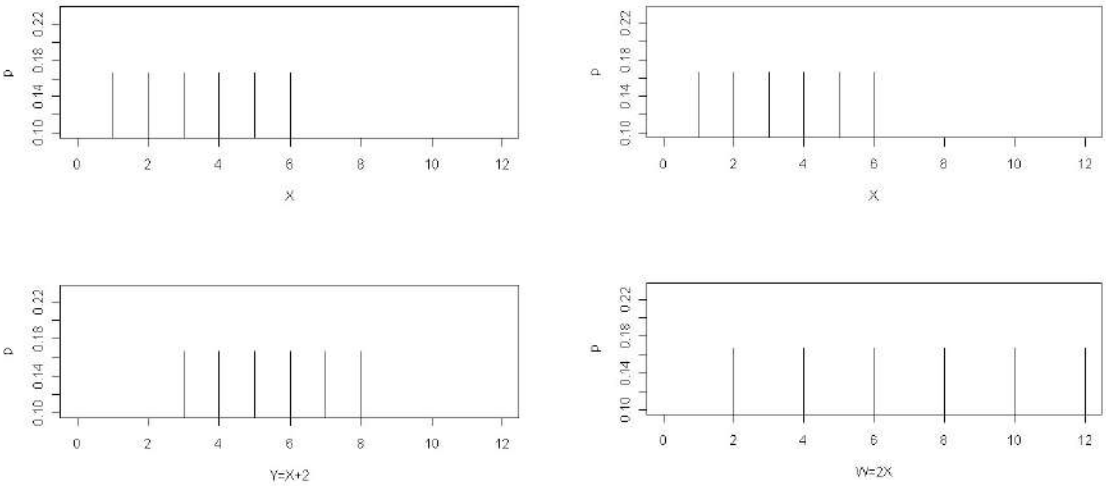
- soma da variável com uma constante C
  se Y = X + C $\rightarrow$ E(Y) = E(X+C) = E(X) + C
  V(Y) = V(X+C) = V(X)
- produto da variável por uma constante C
  se W = CX $\rightarrow$ E(W) = E(CX) = CE(X)
  V(W) = V(CX) = C^2V(X)
- soma de duas ou mais variáveis independentes
  se Y = $X_1 + X_2$ $\rightarrow$ E(Y) = E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2)
  V(Y) =V(X_1+X_2) = V(X_1) + V(X_2)

Suponha que lançamos um dado, e consideramos a variável X : número mostrado pelo dado. Se criamos as variáveis Y=X+2 e W=2X, elas terão valor esperado e variância iguais a:

Y=X+2
E(X) = 3,5 $\rightarrow$ E(Y) = E(X+2) = E(X)+2 = 5,5
V(X) = 2.917 $\rightarrow$ V(Y) = V(X) = 2.917

W=2X
E(X) = 3,5 $\rightarrow$ E(W) = 2E(X) = 7,0
V(X) = 2.917 $\rightarrow$ V(W) = 2^2V(X) = 11,668

A Fig. **2A** mostra a distribuição de X e de Y, ilustrando o efeito da soma da VAD com uma constante (o gráfico de X se desloca para a direita, mas sua dispersão não se altera; o valor esperado aumenta, a variância não). A Fig. **2B** mostra a distribuição de X e de W, ilustrando o efeito da multiplicação da VAD por uma constante (o gráfico se desloca e aumenta de dispersão; o valor esperado e a variância aumentam). Podemos observar nos gráficos, também, que tanto a soma como produto da VAD por uma constante não alteram a forma da distribuição: Y e W também têm distribuições uniformes.



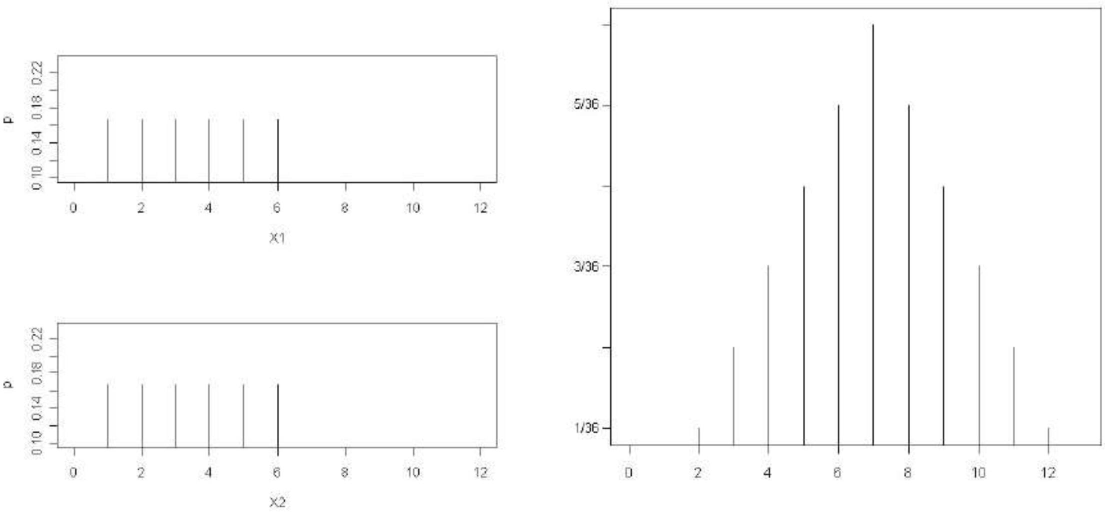
A. Soma de VAD com uma constante B. Produto de VAD por uma constante

Figura 2. Some e produto de uma VAD por uma constante

Suponha agora que lançamos dois dados, e consideramos as variáveis X_1 e X_2, os números mostrados por estes dados. A soma destas duas variáveis gera uma nova variável Y. Podemos calcular seu valor esperado e variância usando as propriedades acima:

$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7$$
$$V(Y) = V(X_1) + V(X_2) = 5{,}834$$

A Fig. 3A mostra as distribuições das duas VADs uniformes X_1 e X_2. A Fig. 3B mostra a distribuição da soma Y. É possível observar que E(Y) = 7, e que a dispersão de Y é maior do que as das variáveis X_1 e X_2. Além disso, que a soma das duas VADs independentes resulta numa variável cuja distribuição segue um modelo inteiramente diferente daquele das variáveis X_1 e X_2.



A. VADs no lançamentos de dois dados B. VAD resultante da soma de dois dados

Figura 3. Soma de duas VADs

Exemplo 3. Lançamento de três dados

Suponha que lançamos três dados comuns, e a variável de interesse é X: número de dados que mostram a face 6. Queremos calcular o valor esperado e a variância de X.

Há várias maneiras de resolver este problema. A primeira é calculando a distribuição de probabilidades de X, fazendo um diagrama de árvore que represente os resultados dos três dados. Fizemos isto na seção **3.1.6**, e obtivemos como resultado a Tabela **2**.

Tabela 2. Distribuição de probabilidades no lançamento de três dados (X: número de dados que mostram a face 6)

X	p(x)	
0	125/216	0,5787
1	75/216	0,3472
2	15/216	0,0694
3	1/216	0,0046

A partir da tabela, podemos calcular o E(X) e V(X) usando as definições:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)$$

$$E(X) = 0 \times 0{,}5787 + 1 \times 0{,}3472 + 2 \times 0{,}0694 + 3 \times 0{,}0046 = 0{,}5000$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$

$$V(X) = (0 - 0{,}5)^2 \times 0{,}5787 + (1 - 0{,}5)^2 \times 0{,}3472 + \\ + (2 - 0{,}5)^2 \times 0{,}0694 + (3 - 0{,}5)^2 \times 0{,}0046 = 0{,}4167$$

Uma outra maneira de resolver é considerando que cada dado gera uma variável *Z* que têm apenas dois valores, *Z*=1 (se o dado mostra a face) e *Z*=0 (se o dado não mostra a face 6). Para cada dado, portanto, a distribuição de probabilidades da variável Z é a mostrada da Tab. **3.**

Tabela 3, Probabilidades no lançamento de um dados

Z	p(z)
0	5/6
1	1/6
Σ	1

A variável que nos interessa (X: número de faces mostrando a face 6) pode então ser calculada como a soma das variáveis Z produzidas pelos três dados:

$$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Podemos agora calcular E(*X*) e V(*X*) usando as propriedades das soma de VADs. Para cada dado, o valor esperado e a variância de Z são:

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{2} z_i p(z_i) = 0 \times 5/6 + 1 \times 1/6 = 1/6$$

$$V(Z) = \sum_{i=1}^{2} \left[(z_i - E(Z))^2 . p(z_i) \right] = (0 - 1/6)^2 \times 5/6 + (1 - 1/6)^2 \times 1/6 = 0{,}1389$$

Para a variável *X*, que é soma das três variáveis *Z*, obtemos

$$X = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

$$E(X) = E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3)$$

$$E(X) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 0{,}5$$

$$V(X) = V(Z_1) + V(Z_2) + V(Z_3)$$

$$V(X) = 0{,}1389 + 0{,}1389 + 0{,}1389 = 0{,}4167$$

Veremos que este problema pode ser resolvido ainda de uma terceira maneira, usando o modelo binomial (seção **3.3.5**).