5.3.3. Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon

5.3.3.1. Introdução

O teste dos sinais perde muita informação, quanto aplicado sobre dados numéricos em amostras pareadas, por não levar em conta as magnitudes das diferenças, mas apenas os sinais destas diferenças. O *teste dos postos sinalizados de Wilcoxon* (*Wilcoxon signed-rank test*) corrige isto; as diferenças observadas em cada par são primeiro ordenadas em valores absolutos, e recebem postos; em seguida, estes postos recebem os sinais das diferenças originais. Assim, tanto os sinais quanto as magnitudes (valores absolutos) das diferenças são levados em conta.

A estatística de teste T é a soma dos postos das diferenças positivas. A hipótese nula é de que a distribuição das diferenças tenha mediana nula; se for verdadeira, a soma dos postos negativos (obtidos pelas diferenças negativas) deve ser aproximadamente igual à soma dos postos positivos, porque a probabilidade de um posto ser positivo é igual à de ele ser positivo

Para amostras grandes, T terá distribuição que tende para a normal, com os parâmetros dados nas equações em (**1**).

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} \qquad \sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \tag{1}$$

Se há pares cuja diferença absoluta é nula, eles devem ser descartados da amostra. Se há dois ou mais pares que têm a mesma diferença, o posto que eles devem receber será uma média entre as posições que estes pares ocupam na sequência ordenada das diferenças absolutas. Por exemplo, se a sequência dos valores absolutos das diferenças for a que está na primeira linha do quadro abaixo (linha *dif.*), os postos serão os que estão na segunda linha (*posto*). Note que as três menores diferenças (1,3 e 4) recebem os postos 1, 2, 3. Em seguida, há duas diferenças com o mesmo valor, ocupando a 4ª e a 5ª posição; recebem como posto a média entre 4 e 5. Há três valores repetidos ocupando as posições de 7 a 9; recebem como posto a média entre as posições que ocupam, (7+8+9)/3=8.

dif.	1	3	4	5	5	7	9	9	9	11	14
posto	1	2	3	4,5		6	8			10	11

Se há nas amostras este tipo de empates, deve ser feito um ajuste na fórmula da variância da estatística T, que passa a ser a que está em (**2**).

$$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{48}\sum_{j=1}^{k} q_j(q_j^2 - 1) \tag{2}$$

onde

k = número de empates

q_j = número de elementos no j-ésimo empate

5.3.3.2. Exemplo

Um experimento foi feito para verificar se um programa de exercício aeróbico leve (caminhadas em esteiras, três vezes por semana, durante um mês) poderia levar à redução do IMC (índice de massa corporal) de pacientes obesos. Uma amostra de 15 pacientes teve seus IMC medidos antes do início do programa (variável A), e medidos novamente depois de um mês (variável B). A Tab. 1 mostra os resultados encontrados. Para analisá-los, usaremos o teste dos postos sinalizados de Wilcoxon para testar a hipótese de que não houve diferença significativa nos IMC antes e depois do programa de exercícios. O teste será bilateral, com nível de significância α=0,05.

A primeira coisa a fazer é calcular as diferenças observadas em cada par (coluna *dif.*), listar os valores absolutos destas diferenças (coluna |*dif.*|), e calcular seus postos (coluna *postos*). Há um par que tem diferença nula (par 3); este par, destacado na tabela por uma linha cinza, foi descartado da análise. A menor diferença observada (em módulo) foi |*dif.*| = 1, obtida pelos pares 1, 6, 10 e 12; estes quatro pares compartilham o posto 2,5, que é a média entre as postos 1, 2, 3 e 4. A segunda menor diferença foi |*dif.*| = 2, obtida pelos pares 5, 7 e 14; estes pares receberam o posto 6, que é a média entre os postos 5, 6 e 7. A terceira menor diferença foi |*dif.*|=3, e novamente houve um empate: os pares 4 e 15 tiveram esta diferença, e receberam o posto 8,5, média entre os postos 8 e 9. As diferenças seguintes, |*dif.*|=4 a |*dif.*|=8, foram recebidas pelos pares 2, 11, 13, 9 e 8, que receberam os postos de 10 a 14, respectivamente. Estes resultados são mostrados na Tab. 1.

Tabela 1

par	ração		dif.	| dif.|	posto	posto sinalizado	postos positivos
	A	B					
1	33	34	−1	1	2,5	−2,5	
2	36	32	4	4	10	10	10
3	32	32	0				
4	33	36	−3	3	8,5	−8,5	
5	34	32	2	2	6	6	6
6	34	33	1	1	2,5	2,5	2,5
7	34	32	2	2	6	6	6
8	38	30	8	8	14	14	14
9	37	30	7	7	13	13	13
10	33	34	−1	1	2,5	−2,5	
11	36	31	5	5	11	11	11
12	33	32	1	1	2,5	2,5	2,5
13	35	29	6	6	12	12	12
14	35	33	2	2	6	6	6
15	33	30	3	3	8,5	8,5	8,5
						sum =	91,5

A estatística de teste será a soma dos postos positivos, T = 91,5. Como um dos pares foi eliminado, por ter diferença nula, temos agora n = 14, e os parâmetros da distribuição amostral de T são dados por:

$$\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{14(14+1)}{4} = 52{,}5$$

Para a variância, como há vários empates, usamos a expressão corrigida dada em (2):

$$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{48}\sum_{j=1}^{k} q_j (q_j^2 - 1) \quad \text{onde:} \qquad k = 3;\ q_1{=}4,\ q_2{=}3,\ q_3{=}2$$

$$\sigma_T^2 = \frac{14(14+1)(2\times 14+1)}{24} - \frac{4\times 15 + 3\times 8 + 2\times 3}{48} = 251{,}87$$

$$\sigma_T = \sqrt{251{,}87} = 15{,}87$$

Padronizando a estatística de teste:

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{91{,}5 - 52{,}5}{15{,}87} = 2{,}46$$

Se consideramos um nível de significância α=0,05, este valor de z está acima do valor crítico z_c = 1,96, o que leva à rejeição da hipótese nula; se usarmos porém α=0,01, o valor de z estará abaixo do valor crítico z_c = 2,58, e a hipótese nula *não* será rejeitada. Portanto, há evidência nestes resultados de que a redução do IMC foi significativa, mas esta evidência não é muito forte. O valor-p, calculado por meio da tabela da distribuição normal, leva à mesma conclusão:

$$p = 2\times(0{,}5 - 0{,}4931) = 0{,}0138$$

3. Teste dos postos sinalizados de Wilcoxon no R

O teste pode ser feito no R através do comando `wilcox.test`. Para os dados do exemplo acima, os comandos necessários são:

```
A=c(33,36,32,33,34,34,34,38,37,33,36,33,35,35,33)
B=c(34,32,32,36,32,33,32,30,30,34,31,32,29,33,30)
wilcox.test(A,B,paired=T)
```

A saída (*printout*) resultante é dada a seguir.

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data:  A and B
V = 103, p-value = 0.01532
alternative hypothesis:
alternative hypothesis:
      true location shift is not equal to 0

Warning messages:
In wilcox.test.default(A, B, paired = T) :
  cannot compute exact p-value with ties
```

Note que o valor-p encontrado está bem próximo daquele que calculamos na seção anterior, usando a aproximação pela distribuição normal. O R normalmente faz o teste exato, isto é o teste que usa métodos de análise combinatória para calcular as probabilidades; neste exemplo, porém, devido à existência de zeros (diferenças nulas) e de empates (pares que têm a mesma diferença), não é possível calcular o valor-p exato, e o R fez uma aproximação).